La Geometría Fractal: la geometría de la complejidad y sus aplicaciones

Miguel Angel Martín
Grupo de Investigación en Fractales y Aplicaciones PEDOFRACT
http://www.etsia.upm.es/gruposinv/pedofract/
Dpto. Matemática Aplicada
ETSI Agrónomos
Universidad Politécnica de Madrid

1. Introducción.

Durante los últimos años la llamada Teoría de Fractales ha experimentado una gran popularización. Este fenómeno poco habitual en el mundo de las Matemáticas ha estado alimentado en parte por la vistosidad de las imágenes fractales, por una parte, y por el gran número de aplicaciones de dicha teoría en otras ciencias, por otra.

Aunque los fundamentos teóricos pertenecen a ámbitos de las matemáticas ciertamente profundos y no muy popuralizables, esta parcela de las matemáticas tiene elementos espectaculares fácilmente entendibles por personas no especializadas y con gran trascendencia para entender los orígenes de la complejidad geométrica y sus manifestaciones en la Naturaleza (y en las Ciencias, en general). La intención de este artículo es mostrar a través de ejemplos sencillos algunos de esos elementos e ideas esenciales y mostrar su potencial didáctico en la enseñanza de las Ciencias y de las Matemáticas.

2. **Iteración y complejidad: el juego del caos.**

Consideremos ahora otro ejemplo de ley de evolución o sistema dinámico. Supongamos que marcamos tres puntos A, B, C en el plano y partiendo de un punto x_0 cualquiera nos dirigimos en línea recta hacia uno de dichos puntos quedándonos a mitad de camino entre el punto seleccionado y el punto de partida x_0.

El punto al que hemos de dirigirnos lo seleccionamos de forma aleatoria tirando un dado y con las siguientes reglas: si sale 1 ó 2 nos dirigimos al punto A, si sale 3 ó 4 nos dirigimos al punto B y si sale 5 ó 6 vamos hacia el punto C. Si llamamos x_1 al punto en el que nos hemos quedado una vez hemos tirado el dado y hemos obrado con la norma antes apuntada, repetimos exactamente el mismo proceso una y otra vez obteniendo los puntos o estados $x_2, x_3, ..., x_n, ...$

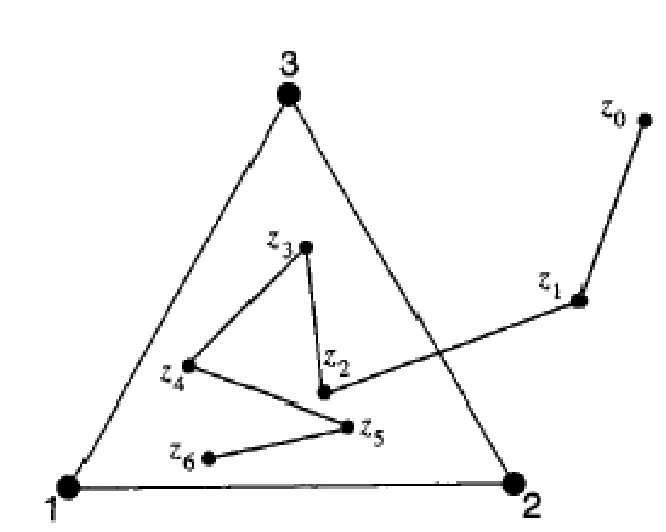

Figura 1

¿Podría predecirse hacia qué punto o región se dirigen los "futuros" x_n? ¿Vagarán al azar o existe algún tipo de certidumbre? ¿Dependerán del estado inicial? Puesto que nuevamente se trata de un problema ingenuo que todos podemos entender, parar la lectura de este artículo y pensar en estas preguntas por algún tiempo sería altamente aconsejable.

La figura 5 muestra el resultado de dos simulaciones partiendo del mismo punto, una con 20 iteraciones y otra con 30 iteraciones . Puede verse que los resultados son distintos. La figura 6 muestra simulaciones con 100, 500 y 1000 puntos. El resultado es sorprendente: ¡siempre aparece la misma figura!

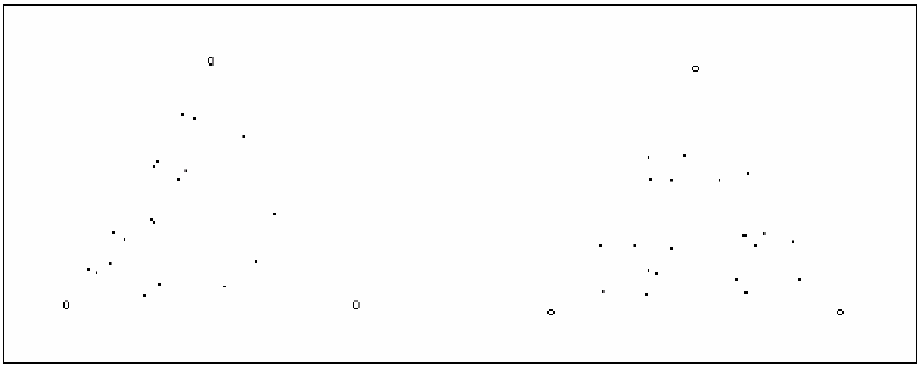

Figura 2

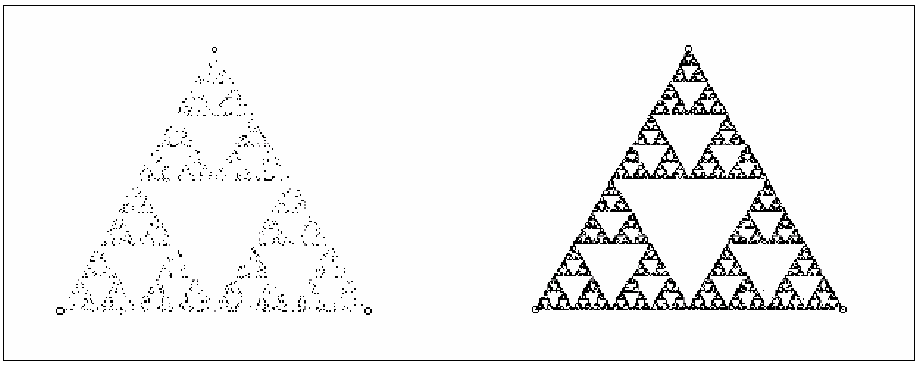

Figura 3

2. Los conjuntos fractales. Autosemejanza.

Un ejemplo de conjunto fractal es el conjunto límite resultante del proceso iterativo siguiente: se parte de la región plana (cerrada) delimitada por un triángulo equilátero T_0 de lado unidad y, en la primera etapa, nos quedamos con las regiones limitadas por los tres triángulos equiláteros de lado r que, respectivamente, tienen uno de sus vértices coincidente con otro del triángulo inicial (T_1, T_2 y T_3). En cada uno de ellos se repite el proceso quedándonos con los nueve triángulos de lado r^2, y así sucesivamente….El conjunto límite que quedaría después de seguir el proceso indefinidamente es comúnmente conocido como el *triángulo de Sierpinsky*. El resultado del juego del caos del apartado anterior sería es un triángulo de Sierpinsky con $r = 1/2$.

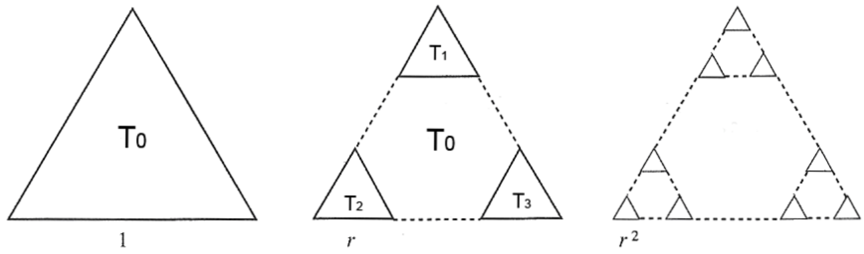

Figura 4

Otro ejemplo es la *curva de Koch* cuya construcción viene sugerida en la figura 5

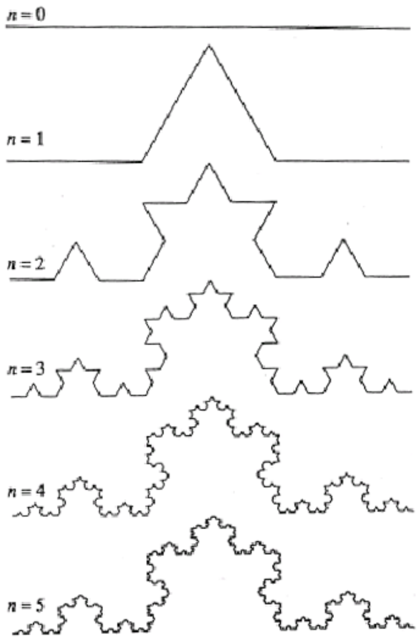

Figura 5

En ambos casos se trata de dos objetos geométricos de carácter intermedio. El primero de ellos se muestra como una "nube" de puntos si $r < 1/2$, y el segundo, como una curva de longitud de arco infinita careciendo de recta tangente en todos sus puntos.

3. La Ecuación de un fractal.

Muchos de los ejemplos de conjuntos fractales (curva de Koch, triángulo de Sierpinsky, etc…) tienen la propiedad de estar formados por partes que son copias de si mismos con un cierto factor de escala; se dice que son *conjuntos* autosemejantes.

Por ejemplo, denominemos w_1, w_2, w_3 a las semejanzas que transforman el triángulo T_0 inicial de la figura 1 en cada uno de los triángulos T_1, T_2, T_3 (triángulos de la primera etapa de la construcción –suponerlos dentro de T_0 con uno de sus vértices coincidiendo con los de T_0-). Si llamamos E al conjunto límite (triángulo de Sierpinsky), se verifica que

$$E = \bigcup_{i=1}^{3} w_i(E)$$

De la misma forma la autosemejanza de la curva de Koch viene sugerida por la figura 6.

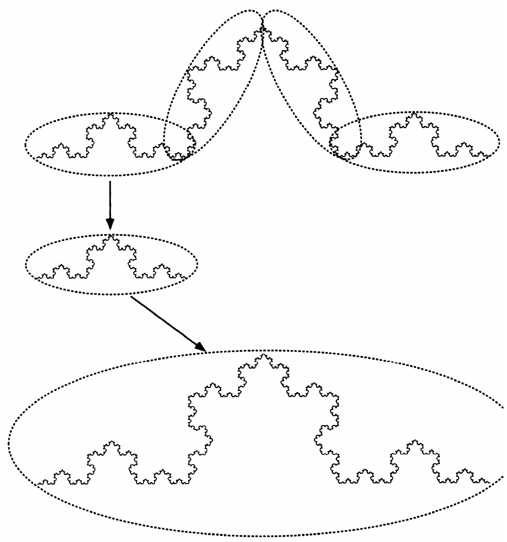

Figura 6.

La autosemejanza determina la invarianza de su geometría respecto de la escala a la que son observados mostrando huecos (regiones sin puntos) e irregularidades a todas las escalas: si hiciéramos un “zoom” en uno de los triangulitos más pequeños lo que veríamos de nuevo es otro triángulo de Sierpinski.

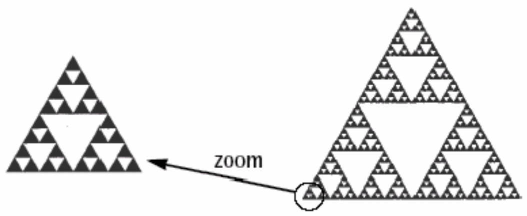

Figura 7

Esta propiedad tiene importantes consecuencias ya que cuando tiene lugar la igualdad anterior ésta sirve por sí sola para definir el conjunto fractal en cuestión pues a la luz de ella, el conjunto E puede ser visto como el punto fijo de la transformación conjuntista f definida para conjuntos compactos del plano como

$$f(K) = \bigcup_{i=1}^{3} w_i(K)$$

Dicha transformación resulta ser contractiva respecto de la llamada métrica de Hausdorff, lo que garantiza la existencia de un único punto fijo, por lo que la igualdad sirve para definir el fractal en cuestión: la igualdad se convierte así en la ecuación de la cual el fractal es la solución.

Las consecuencias prácticas de lo anterior son interesantes. Imaginemos que no sabemos ni imaginamos la apariencia de un conjunto autosemejante definido como el objeto geométrico que verifica una ecuación como la anterior, dándonos simplemente las expresiones analíticas de las semejanzas que en ella intervienen.¿Podríamos dibujarlo? La respuesta es afirmativa. Si las semejanzas son todas ellas contractivas, la transformación f anterior también lo es (respecto de la métrica de Hausdorff), por lo que el teorema del punto fijo asegura que partiendo de *cualquier* compacto K (en la figura, un cuadrado), las iteraciones $f^n(K) = f(f(....f(K))$ convergen al único punto fijo, esto es, al conjunto autosemejante en cuestión. Basándonos en estos hechos es posible obtener algoritmos eficientes para dibujar fractales por ordenador (ver Barnsley, 1988 o Guzmán *et al*. 1993, para más detalles). La figura 8 ilustra lo anterior.

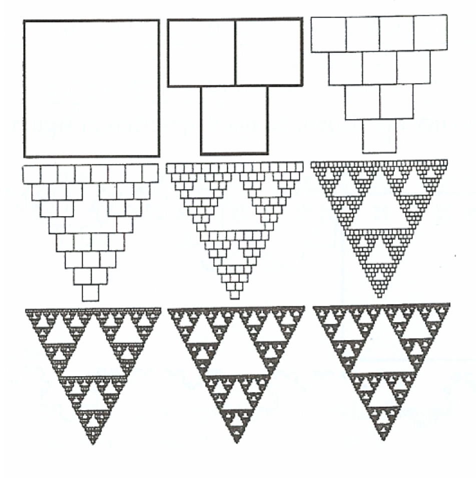

Figura 8

La idea de autosemejanza conduce a variantes y generalizaciones como las construcciones autoafines o los Sistemas de Funciones Iteradas, que han propiciado un gran desarrollo de esta parte de la Geometría Fractal que podríamos llamar Geometría Autosemejante.

La *dimensión fractal* de esa región, que en este caso es $\log 3 / \log 2$, viene a reflejar su capacidad para rellenar el espacio, indicando que se trata de un objeto geométrico con tamaño intermedio entre una curva y una superficie.

5. Fractales en la Naturaleza

La complejidad en la naturaleza es más una norma que una excepción manifestándose por medio de estructuras de naturaleza fractal. Este tipo de *orden intermedio* surge bien como fruto de dinámicas caóticas o bien como una necesidad de los sistemas para cumplir una misión o ser estables. Así, por ejemplo, la estructura ramificada (fractal) de los bronquios es la respuesta de la naturaleza a la necesidad de intercambiar el oxígeno en la sangre en plazos pequeños de tiempo, o la complicada estructura tridimensional de los vasos sanguíneos en el hígado responde a la necesidad de optimizar el proceso metabólico.

Figura 8.

Las figuras 8 y 9 muestran formas sugerentes que permiten dudar sobre si ciertas formas de la naturaleza imitan a los fractales o son los fractales los que replican las formas de la naturaleza.

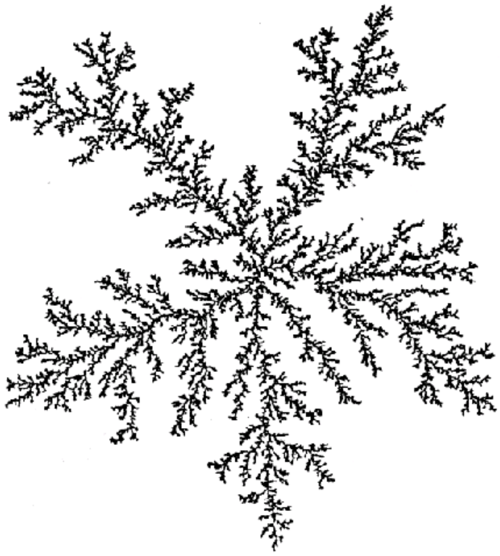

Figura 9.

La irrupción de las nuevas teorías del caos y los fractales han conducido a las nuevas teorías sobre la complejidad que tratan de explicar sistemas tan distintos como el cerebro humano, la organización en un hormiguero o la estructura de los ecosistemas. Estas teorías han propiciado una nueva visión sobre la organización de los sistemas en general sugiriendo cómo sistemas aparentemente distintos obedecen a pautas de complejidad muy similares con la omnipresencia de esas estructuras intermedias que facilitarían el buen funcionamiento evitando que los sistemas colapsen. La cadena de interacciones locales entre los elementos constitutivos del sistema (neuronas, hormigas, elementos vivos de una cadena trófica) que reciben y transmiten información básicamente local a los elementos vecinos, hace emerger una estructura de orden a gran escala. El paralelismo con el juego del caos es grande. Allí el paso de un estado (punto) al siguiente tiene un factor de certeza (se va hacia uno de los tres puntos) y también una "dosis" de incertidumbre. El resultado es la emergencia de la estructura global cuando el número de iteracciones es grande, aun cuando poco puede ser conocido de la succesión de puntos (órbita) en una secuencia concreta.

Las estructuras a medio camino entre el orden y el desorden parecen esconder la armonía y la belleza en muchos órdenes de la vida. Piénsese, por ejemplo, en la música como una secuencia de notas. Una melodía consistente en una sucesión predeterminada de notas (DO-RE-MI-...DO-SI-LA-SOL-......), que se repite una y otra vez, resultaría monótona y aburrida por predecible. Por contra una melodía formada por notas completamente incorrelada (obtenida, por ejemplo, lanzando un dado para seleccionar cada nota), sería algo desagradable. La armonía surge de un tipo de orden intermedio que mantiene el factor sorpresa mediante la presencia de cierta aleatoriedad y mitiga la impredecibilidad total con un grado de memoria respecto del pasado (notas anteriores) : Los llamados *ruidos fractales* o ruidos coloreados son ruidos con memoria intermedia entre el *ruido marrón* (también llamado ruido Browniano) y la ausencia total de memoria del *ruido blanco* Los ruidos fractales, en particular el llamado, por razones que no vienen al caso, *ruido 1/f* , aparecen en innumerables situaciones en la naturaleza, desde la geometría de una costa hasta los ritmos cardiacos, pasando por las secuencias de aminoácidos en el ADN (figuras).

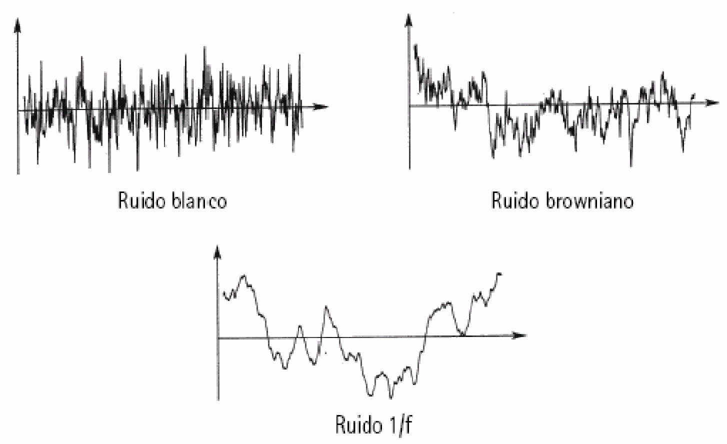

Figura 10

En muchos de esos ejemplos las dimensiones fractales toman valores entre 1 y 2 verificándose esa omnipresencia de las estructuras intermedias que parecen ser una constante en la naturaleza.

6. Algunas consideraciones didácticas.

Los elementos descritos en los apartados anteriores tienen un gran potencial didáctico en la enseñanza de las matemáticas. A modo de ejemplo y sin ánimo de ser exhaustivos citamos los siguientes:

-El juego del caos con más puntos o cambiando ligeramente las reglas da lugar a una gama infinita de formas. La programación en el ordenador es extremadamente simple y puede dar lugar a un enorme número de ejercicios de “matemática experimental”: cada alumno se puede construir “su” fractal y convertirlo en su logo inimitable.

-La construcción de fractales autosemejantes da lugar a un catálogo interminable de figuras y ejercicios geométricos de dificultad gradual.

- La construcción simulada de formas de la naturaleza es un ejercicio altamente motivador y estimulante: las formas, su génesis y hasta su belleza visual puede ser parametrizada o cuantificada.

¡Y muchas cosas más…!

Bibliografía.

M. de Guzmán, M. A. Martín, M. Reyes y M. Morán. 1993. “Estructuras Fractales y Aplicaciones”. Editorial Labor.

M. A. Martín, M. Morán y M. Reyes. 1996. “Iniciación al caos”. Editorial Síntesis.

H-O. Peitgen, H. Jürgens and D. Saupe ,1992. “Chaos and fractals”. Springer-Verlag.